大学数学のアトリエ｜集合論　第 1 章　集合と論理

No.1　集合の定義と演算

この回のゴール

- 集合を外延的記法・内包的記法で書き，「要素である（$\in$）」と「部分集合である（$\subset$）」を区別できる．
- 和集合・共通部分・差集合・補集合を求め，ベン図で表せる．
- ド・モルガンの法則などの演算法則を，「要素を追いかける」方法で証明できる．
- 冪集合と直積を求められる．

■ 1. 集合とは

高校数学でも「集合」は扱ったが，大学の数学では，ほとんどすべての対象（数の集まり，関数の集まり，ベクトル空間，……）が集合の言葉で書かれる．集合論は，大学数学全体の「共通語」を学ぶ分野である．

定義 1　集合と要素

ある範囲に入るか入らないかが**はっきり決まっている**ものの集まりを**集合**という．集合 A に入っている 1 つ 1 つのものを A の**要素**（または**元**）という．x が A の要素であることを $x \in A$（または $A \ni x$）と書き，「x は A に属する」と読む．x が A の要素でないことを $x \notin A$ と書く．

例 1

(1)「1 以上 5 以下の整数の集まり」は集合である．3 はこの集合に属し，6 や $\frac{1}{2}$ は属さない．

(2)「大きな数の集まり」は集合ではない．100 が「大きい」かどうかがはっきり決まらないからである．

よく使う数の集合には，決まった記号がある．

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}\ (\text{自然数}),\quad \mathbb{Z}\ (\text{整数}),\quad \mathbb{Q}\ (\text{有理数}),\quad \mathbb{R}\ (\text{実数}),\quad \mathbb{C}\ (\text{複素数}).$$

このシリーズでは，高校と同じく $\mathbb{N}$ に 0 を含めない．本によっては $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ と 0 を含めるので，教科書の約束を確認しよう．

集合の書き方には，次の 2 通りがある．

- **外延的記法**：要素を全部並べる．例：$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- **内包的記法**：要素がみたす条件を書く．例：$A = \{\, x \in \mathbb{Z} \mid 1 \le x \le 5 \,\}$.

内包的記法 $\{\, x \in X \mid P(x) \,\}$ は，「X の要素 x のうち，条件 $P(x)$ をみたすものの集まり」と読む．$\{\, 2n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ のように，「この形で書けるものの集まり」という書き方もよく使う（これは偶数全体の集合である）．縦棒「$\mid$」の代わりにコロン「:」やセミコロンを使う本もある．

注意

- 集合では，要素を並べる順番や重複は関係ない．$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 3\}$.
- 1 と $\{1\}$ は別物である．1 は数で，$\{1\}$ は「1 だけを要素にもつ集合」である．$1 \in \{1\}$ だが，$1 \neq \{1\}$.

定義 2　空集合・有限集合

要素を 1 つももたない集合を**空集合**といい，$\varnothing$ で表す．要素の個数が有限である集合を**有限集合**，そうでない集合を**無限集合**という．有限集合 A の要素の個数を $|A|$ で表す（本によっては $\#A$，高校では $n(A)$）．

たとえば $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = -1 \right\} = \varnothing$，$|\{1, 3, 5\}| = 3$，$|\varnothing| = 0$ である．無限集合の「個数」をどう比べるかは，第 3 章（濃度）の大きなテーマになる．

■ 2. 部分集合と相等

定義 3　部分集合

集合 A の要素がすべて集合 B の要素でもあるとき，すなわち

$$x \in A \text{ ならば } x \in B$$

が成り立つとき，A は B の**部分集合**であるといい，$A \subset B$（または $B \supset A$）と書く．$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき，A は B の**真部分集合**であるといい，$A \subsetneq B$ と書く．

このシリーズでは，$\subset$ は「等しい場合も含む」意味で使う（$A \subset A$ である）．本によっては，等しい場合を含むものを $\subseteq$，真部分集合を $\subset$ と書くので注意しよう．

定義 4　集合の相等

集合 A，B が**まったく同じ要素からなる**とき，A と B は**等しい**といい，$A = B$ と書く．

定理 1

(1) $A = B \iff A \subset B$ かつ $B \subset A$.

(2) どんな集合 A についても，$\varnothing \subset A$，$A \subset A$.

(3) $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば，$A \subset C$.

【証明】 (1)「A の要素はすべて B にあり，B の要素はすべて A にある」ことは，「A と B が同じ要素からなる」ことにほかならない．

(2) $\varnothing \subset A$ を示すには，「$x \in \varnothing$ ならば $x \in A$」を示せばよい．$x \in \varnothing$ となる x は 1 つもないので，反例がなく，この主張は成り立つ（このような「仮定をみたすものがないので正しい」という考え方は No.2 で詳しく扱う）．$A \subset A$ は明らか．

(3) $x \in A$ とすると，$A \subset B$ より $x \in B$．$B \subset C$ より $x \in C$．よって $A \subset C$．　□

定理 1 (1) は，集合が等しいことを示すときの基本の方法である．**「$A \subset B$」と「$B \subset A$」の 2 つに分けて示す**．そして「$A \subset B$」を示すには，「$x \in A$ とする」から始めて「$x \in B$」にたどりつけばよい．この方法を，ここでは「**要素を追いかける**」と呼ぶことにする．

「∈」と「⊂」の違い

$\in$ は「要素と集合」の関係，$\subset$ は「集合と集合」の関係である．

$$1 \in \{1, 2\}, \qquad \{1\} \subset \{1, 2\}, \qquad \{1\} \notin \{1, 2\}, \qquad 1 \not\subset \{1, 2\} \text{ (意味をなさない)}.$$

ただし，集合の要素が集合であることもある．$A = \{1, \{1\}\}$ なら，$\{1\} \in A$（2 番目の要素）と $\{1\} \subset A$（$1 \in A$ だから）の両方が成り立つ．

例題 1

$A = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$，$B = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とする．$A \subsetneq B$ であることを示せ．

【解答】 $A \subset B$ **であること**：$x \in A$ とすると，ある整数 n を使って $x = 6n$ と書ける．$x = 2 \cdot (3n)$ で $3n \in \mathbb{Z}$ なので，$x \in B$.

$A \neq B$ **であること**：$2 = 2 \cdot 1$ なので $2 \in B$．一方，$2 = 6n$ をみたす整数 n はないので $2 \notin A$．よって $B \not\subset A$ であり，$A \neq B$．以上より $A \subsetneq B$.

■ 3. 集合の演算

定義 5　和集合・共通部分・差集合

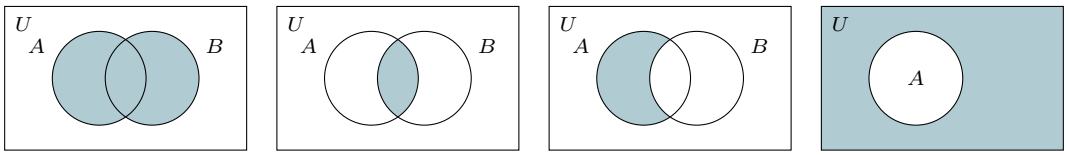
集合 A，B に対して，次のように定める．

- **和集合**：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$
- **共通部分**（積集合）：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$
- **差集合**：$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$（本によっては $A - B$）

$A \cap B = \varnothing$ のとき，A と B は**互いに素**（または交わらない）という．

定義 6　全体集合と補集合

考える対象をすべて含む集合 U を決めておくとき，U を**全体集合**という．$A \subset U$ に対して，$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$ を A の**補集合**という．（高校では $\overline{A}$ と書いた．本によっては $A^{\complement}$ とも書く．）



$A \cup B$　　$A \cap B$　　$A \setminus B$　　A^c

このような図を**ベン図**という．色をつけた部分がそれぞれの集合を表す．

例 2

(1) $U=\{1, 2, \ldots, 10\}$，$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$（偶数），$B=\{3, 6, 9\}$（3 の倍数）のとき，

$$A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\},\quad A\cap B=\{6\},\quad A\setminus B=\{2, 4, 8, 10\},\quad A^c=\{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

(2) 実数の区間 $A=[0, 2]$，$B=(1, 3)$ のとき，$A\cup B=[0, 3)$，$A\cap B=(1, 2]$，$A\setminus B=[0, 1]$，$B\setminus A=(2, 3)$．端点が入るかどうか（[ ] か ( ) か）に注意しよう．

■ 4. 演算法則

定理 2　集合の演算法則

集合 A，B，C について，次が成り立つ（(5)，(6) は全体集合 U の部分集合で考える）．

(1) 交換法則：$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$

(2) 結合法則：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配法則：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4) $A\cup\varnothing=A$，　$A\cap\varnothing=\varnothing$

(5) $(A^c)^c=A$，　$A\setminus B=A\cap B^c$

(6) **ド・モルガンの法則**：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，　$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

結合法則があるので，$A\cup B\cup C$ や $A\cap B\cap C$ はかっこなしで書いてよい．数の計算の分配法則 $a(b+c)=ab+ac$ と違い，集合では $\cap$ と $\cup$ のどちらを「外」にしても分配法則が成り立つ．

【証明】分配法則の 1 つ目とド・モルガンの法則の 1 つ目を，要素を追いかけて示す．残りも同じように示せる．

分配法則：$(\subset)$ $x\in A\cap(B\cup C)$ とすると，$x\in A$ かつ「$x\in B$ または $x\in C$」．$x\in B$ のときは $x\in A\cap B$，$x\in C$ のときは $x\in A\cap C$ なので，どちらの場合も $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$．

$(\supset)$ $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ とすると，$x\in A\cap B$ または $x\in A\cap C$．どちらの場合も $x\in A$ であり，さらに $x\in B$ または $x\in C$，すなわち $x\in B\cup C$．よって $x\in A\cap(B\cup C)$．

ド・モルガンの法則：$x\in U$ について，

$$x\in(A\cup B)^c \iff \text{「}x\in A \text{ または } x\in B\text{」ではない} \iff x\notin A \text{ かつ } x\notin B \iff x\in A^c\cap B^c.$$

ここで「『p または q』ではない」と「『p でない』かつ『q でない』」が同じ意味であることを使った（No.2 定理 2）．　□

ベン図は証明ではない

ベン図は式の意味をつかんだり，答えを予想したりするのにとても便利である．しかし，ベン図は「よくある位置関係」を 1 つ描いたものにすぎず，すべての場合を尽くしているとは限らない（集合が 4 つ以上になると，すべての位置関係を円で描くこともできない）．証明は，要素を追いかけて文章で書こう．

例題 2

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ を示せ．

【解答】 定理 2 (5) と (6)，および ∩ の交換法則・結合法則を使うと，

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

3 つ目の等号は，$A \cap A = A$ を使って A を 2 つに分けた（$A \cap B^c \cap C^c = A \cap A \cap B^c \cap C^c$ を並べかえた）．要素を追いかけて，「$x \in A$ かつ $x \notin B$ かつ $x \notin C$」と両辺を言いかえて示してもよい．

■ 5. 冪集合と直積

定義 7　冪集合

集合 A の部分集合全体の集合を A の**冪集合**（べき集合）といい，$\mathcal{P}(A)$ で表す（本によっては 2^A）．

$$\mathcal{P}(A) = \{\, X \mid X \subset A \,\}.$$

例 3

$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$．$\varnothing$ と A 自身も A の部分集合なので，忘れずに入れる．「要素が集合である集合」の代表例である．たとえば $\{a\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$ であって，$a \in \mathcal{P}(\{a, b\})$ ではない．

定理 3

A が n 個の要素をもつ有限集合ならば，$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$．

【証明】 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ とする．部分集合 X を 1 つ作るには，各 a_i について「X に入れる」か「入れない」かの 2 通りを選べばよく，選び方が違えば違う部分集合ができる．よって部分集合は $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ 個ある． □

この「入れる／入れない」を 1 ／ 0 で表すと，部分集合と「長さ n の 0,1 の列」が 1 対 1 に対応する．この見方は第 3 章で無限集合を考えるときに大活躍する．

定義 8　直積

集合 A，B に対して，$a \in A$ と $b \in B$ の組 (a, b) 全体の集合

$$A \times B = \{\, (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}$$

を A と B の**直積**という．(a, b) を**順序対**といい，$(a, b) = (a', b') \iff a = a'$ かつ $b = b'$ と約束する．$A \times A$ を A^2 とも書く．3 つ以上の直積 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ も同様に定める．

例 4

(1) $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$．一般に，有限集合なら $|A \times B| = |A||B|$ である．

(2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は座標平面，$\mathbb{R}^3$ は座標空間である．分野「線形代数」第 4 章 No.1 で扱った数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ も，集合としては $\mathbb{R}$ の n 個の直積である．

注意

順序対は「順序つき」なので，$(1, 2) \neq (2, 1)$ である（集合 $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ とは違う）．そのため，一般に $A \times B \neq B \times A$．たとえば $\{1\} \times \{2\} = \{(1, 2)\}$，$\{2\} \times \{1\} = \{(2, 1)\}$．

コラム：「すべての集合の集合」は作れない（ラッセルのパラドックス）

「条件をみたすものの集まり」はいつでも集合になるのだろうか．$x \notin x$（自分自身を要素にもたない）という条件で $R = \{\, x \mid x \notin x \,\}$ を作ってみる．もし $R \in R$ なら，R の条件から $R \notin R$ となり矛盾．もし $R \notin R$ なら，条件をみたすので $R \in R$ となり，また矛盾．これが 1901 年にラッセルが見つけたパラドックスである．

そこで現代の数学では，内包的記法は「すでにある集合 X の中から選ぶ」形 $\{\, x \in X \mid P(x) \,\}$ で使う，などのルール（**公理**）を決めて集合を扱う．このルールの体系を**公理的集合論**（ZFC）という．このシリーズでは公理には深入りせず，ふだんの数学で困らない範囲で集合を使っていく．ZFC の C（選択公理）には第 4 章 No.3 で出会う．

■ 練習問題

1. 次の集合を外延的記法で表せ．

$$(1)\ \{\, x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10 \,\} \qquad (2)\ \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^3 = x \,\} \qquad (3)\ \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は } 12 \text{ の約数} \,\}$$

2. $A = \{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$ とする．次の (1)〜(8) の正誤を答えよ．

$$(1)\ 1 \in A \quad (2)\ 2 \in A \quad (3)\ \{2\} \in A \quad (4)\ \{2\} \subset A$$

$$(5)\ \{1\} \subset A \quad (6)\ \{1, 2\} \subset A \quad (7)\ \{1, 2\} \in A \quad (8)\ \varnothing \subset A$$

3. 全体集合を $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$ とし，A を U の中の 2 の倍数全体，B を 3 の倍数全体とする．$A \cap B$，$A \cup B$，$A \setminus B$，$(A \cup B)^c$，$A^c \cap B^c$ を求め，ド・モルガンの法則が成り立っていることを確かめよ．

4. $\mathbb{R}$ の区間 $A = [-1, 3)$，$B = (0, 5]$ について，$A \cup B$，$A \cap B$，$A \setminus B$，$B \setminus A$ を求めよ．

5. 次の (1)，(2) を示せ．

$$(1)\ A \subset B \iff A \cap B = A \qquad (2)\ A \subset B \iff A \cup B = B$$

6. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を A と B の**対称差**という．$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ を示せ．また，$A \triangle B$ をベン図で表せ．

7. 次の冪集合を外延的記法で表せ．

$$(1)\ \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \qquad (2)\ \mathcal{P}(\varnothing) \qquad (3)\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$$

8.（考えてみよう）

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ を示せ．

(b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ は一般には成り立たない．反例をあげよ．また，一般に成り立つ包含関係（$\subset$ か $\supset$ か）はどちらか．

■ 練習問題の解答

1. (1) $x^2 < 10$ をみたす整数は $-3 \leq x \leq 3$ なので，$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
(2) $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$ より $\{-1, 0, 1\}$.
(3) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

2. A の要素は 1，$\{2\}$，$\{1, 2\}$ の 3 つである（2 そのものは要素ではない）.
(1) 正．(2) 誤．(3) 正．(4) 誤（$\{2\} \subset A$ には $2 \in A$ が必要）．(5) 正（$1 \in A$）．(6) 誤（$2 \notin A$）．(7) 正．(8) 正（定理 1 (2)）.

3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$，$B = \{3, 6, 9, 12\}$ より，

$$A \cap B = \{6, 12\}, \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}, \quad A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}.$$

$(A \cup B)^c = \{1, 5, 7, 11\}$．$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$，$B^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ より $A^c \cap B^c = \{1, 5, 7, 11\}$．両者は等しく，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成り立っている.

4. $A \cup B = [-1, 5]$，$A \cap B = (0, 3)$，$A \setminus B = [-1, 0]$，$B \setminus A = [3, 5]$．（$0 \notin B$ なので $0 \in A \setminus B$，$3 \notin A$ なので $3 \in B \setminus A$.）

5. (1) ($\Rightarrow$) $A \cap B \subset A$ はつねに成り立つ．逆に $x \in A$ とすると，$A \subset B$ より $x \in B$ なので $x \in A \cap B$．よって $A \cap B = A$.
($\Leftarrow$) $x \in A$ とすると，$A = A \cap B$ より $x \in A \cap B$，特に $x \in B$．よって $A \subset B$.
(2) ($\Rightarrow$) $B \subset A \cup B$ はつねに成り立つ．$x \in A \cup B$ とすると，$x \in A$ なら $A \subset B$ より $x \in B$，$x \in B$ ならそのまま．よって $A \cup B \subset B$ で，$A \cup B = B$.
($\Leftarrow$) $x \in A$ とすると $x \in A \cup B = B$．よって $A \subset B$.

6. 要素を追いかける．$x \in A \triangle B$ とすると，「$x \in A$ かつ $x \notin B$」または「$x \in B$ かつ $x \notin A$」．どちらの場合も $x \in A \cup B$ で，x は A, B の一方にしか属さないので $x \notin A \cap B$．よって $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$．逆に $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ とする．$x \in A$ のときは，$x \notin A \cap B$ より $x \notin B$ なので $x \in A \setminus B$．$x \in B$ のときも同様に $x \in B \setminus A$．よって $x \in A \triangle B$.
ベン図では，2 つの円のうち重なっていない部分（三日月形 2 つ）に色をつけたものになる.

7. (1) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$（$2^3 = 8$ 個）.
(2) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$．空集合の部分集合は空集合だけなので，要素は 1 個である（$2^0 = 1$）．$\{\varnothing\}$ は空集合ではないことに注意.
(3) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ は要素を 1 個もつので，その部分集合は $\varnothing$ と $\{\varnothing\}$ の 2 個．よって $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

8. (a) $(x, y) \in A \times (B \cup C) \iff x \in A$ かつ「$y \in B$ または $y \in C$」$\iff$「$x \in A$ かつ $y \in B$」または「$x \in A$ かつ $y \in C$」$\iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.
(b) $A = B = \{1\}$，$C = D = \{2\}$ とすると，$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ だが，$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{1, 2\}^2$ は $(1, 2)$ も含む．一般には $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ が成り立つ（左辺の要素 (x, y) は $x \in A \cup C$，$y \in B \cup D$ をみたすから）．A，B，C，D を区間として座標平面に描くと，左辺は 2 つの長方形 $A \times B$，$C \times D$ だが，右辺はそれに $A \times D$，$C \times B$ を加えた 4 つの長方形の和になる.